

Univerzitet u Nišu
Fakultet zaštite na radu u Nišu

ELEKTRO KINETIKA

dr Vladimir Stanković, docent

ELEKTROTEHNIKA
Skraćeni izvod predavanja
2018.

Elektrokinetika - Električna struja

Deo nauke o elektricitetu koja proučava usmereno kretanje električnog opterećenja, odnosno električne struje.

Uređeno kretanje električnih opterećenja bez obzira na njihovu vrstu i uzroke kretanja (elektroni, pozitivni i negativni joni).

Sredine kroz koje može da protiče struja:

- čvrste (nosioci su elektroni),
- tečne (elektrolitske sredine, nosioci su joni),
- gasovite (po pravilu su dielektrici, ali može doći do pojave struje (jonizacija); nosioci su elektroni i joni – neonske i fluorescentne cevi),
- vakuum (nosioci su elektroni (zagrevanjem katode) – elektronske cevi sa vakuumom).

Električna struja

Podela prema vrsti pokretnih naelektrisanja i silama koje izazivaju to kretanje:

Električna struja

- elektronska – bez materijalnih promena u sredini
- jonska – prenos supstance i hemijske promene sredine

Električna struja

- kondukciona – posledica dejstva električnog polja (struja provodnosti)
- konvekciona – izvor kretanja naelektrisanja je sila neelektričnog porekla ili inerciona sila (prostiranje, strujanje)

conductio – provođenje elektriciteta i toplote
convectio – strujanje

Stacionarno el. polje $\Leftrightarrow$ stacionarna el. struja

Kondukciona električna struja – usmereno kretanje slobodnih elektrona (elektroni provodnosti) kroz čvrste provodnike pod dejstvom električnog polja.

Stacionarna električna struja = nepromenljiva u vremenu

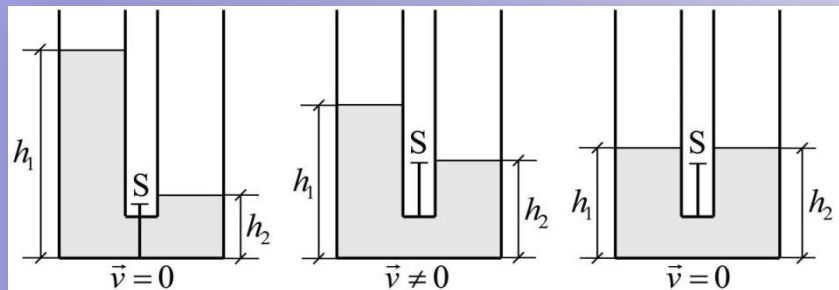
Stacionarna električna struja $\Leftarrow$ stacionarno električno polje

Stacionarno električno polje
Elektrostatičko polje } nepromenljiva u vremenu

Razlika {
stacionarno el. polje postoji unutar provodnika
(elektrostatičko ne)
za održavanje stacionarnog el. polja potrebno je stalno
vršiti rad

Stacionarno el. polje $\Leftrightarrow$ stacionarna el. struja

Hidrodinamička analogija:



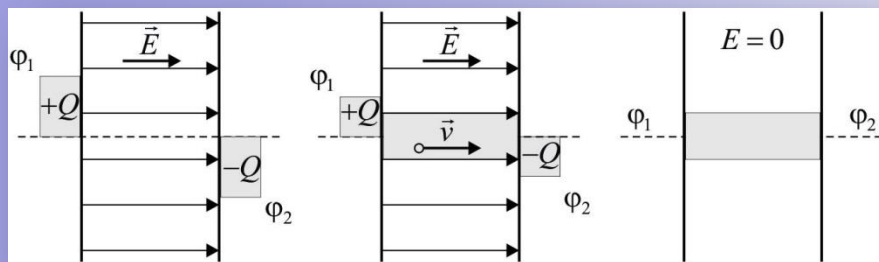
$$\Delta h = h_1 - h_2$$

- S zatvoreno – nema protoka
- S otvoreno – najveća brzina pri otvaranju

$$\Delta h \downarrow \Rightarrow \vec{v} \downarrow$$

$$\Delta h = 0 \Rightarrow \vec{v} = 0$$

Ovakav sistem ne može da obezbedi da kroz spojnu cev tečnost protiče stalnom brzinom.



$$U = \varphi_1 - \varphi_2$$

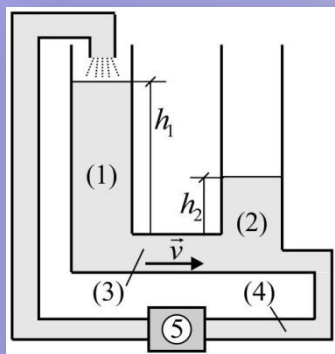
- povezan provodnik – protok naelektrisanja

$$Q \downarrow \text{ i } U \downarrow \Rightarrow E = 0 \text{ i } U = 0$$

Postoji kratkotrajna promenjiva struja.

Stacionarno el. polje $\Leftrightarrow$ stacionarna el. struja

Hidrodinamička analogija:



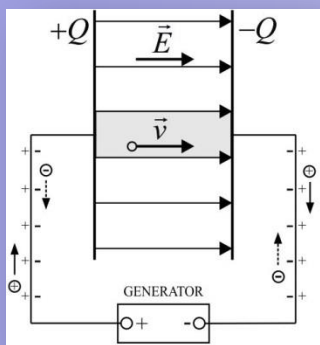
$$\Delta h = h_1 - h_2 = \text{const.}$$

- stalna razlika nivoa tečnosti = stalna brzina
- stalno kruženje tečnosti
- količine tečnosti u sudovima 1 i 2 nazivaju se stacionarnim (količina tečnosti u svakom sudu je ostala ista, ali to nije ista tečnost)

Uslov:



- postojanje zatvorenog puta kroz koji će strujati tečnost,
- stalno ulaganje rada kako bi pumpa prebacivala tečnost.



- stacionarno el. polje $\Rightarrow$ stacionarna brzina slobodnih pokretljivih naelektrisanja $\Rightarrow$ stacionarna struja
- „strujna pumpa“ = strujni izvor ili električni generator

Stacionarno el. polje $\Leftrightarrow$ stacionarna el. struja

Zaključak:

- ✓ osenčena provodna veza mora biti deo zatvorenog strujnog kola sačinjenog od provodnika (zatvoreni provodni put),
- ✓ u zatvorenom kolu mora postojati električni uređaj (generator) koji, nasuprot silama stacionarnog električnog polja, kontinuirano prebacuje prispele elektrone provodnosti sa pozitivne elektrode na negativnu (ekvivalentno sa – pozitivna opterećenja u suprotnom smeru) i tako se održava stalna potencijalna razlika.

Stacionarno električno i elektrostatičko polje

Sličnost:

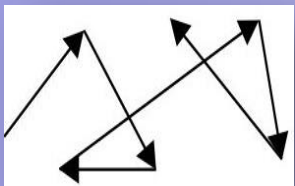
- stacionarna naelektrisanja se razlikuju od statičkih po tome što se stalno pomeraju, ali im je zajedničko to što im je gustina u svakoj tački konstantna u vremenu,
- električno polje stacionarnih naelektrisanja je istovetno sa poljem na isti način raspoređenih nepokretnih elektrostatičkih naelektrisanja => stacionarno električno polje je konzervativno.

Razlika:

- stacionarno el. polje neprekidno vrši rad pokrećući slobodna el. opterećenja, pa je za njegovo održavanje neophodno stalno dovodenje energije sistemu,
- za održavanje već uspostavljenog elektrostatičkog polja u idealnom dielektriku nije potreban nikakav utrošak energije.

Prostor u kome se pokretna naelektrisanja kreću pod dejstvom električnog polja naziva se strujno polje. Slikovito se predstavlja linijama koje u svakoj tački za tangentu imaju vektor srednje makroskopske brzine pokretljivih naelektrisanja. Ako je ova brzina u svakoj tački strujnog polja konstantna u vremenu, strujno polje je stacionarno.

Pokretljivost nosilaca naelektrisanja



- Kretanje slobodnih nosioca naelektrisanja je i bez postojanja stranog električnog polja složeno – haotično termičko kretanje,
- naelektrisanja se sudaraju sa atomima i molekulima sredine,
- => vektorski zbir njihovih brzina a samim tim i vektor srednje brzine je jednak nuli.



- Uspostavljanjem stranog stacionarnog el. polja na haotično kretanje slobodnih nosilaca superponira se kretanje pod dejstvom el. polja,
- između dva sudara sa atomima i molekulima sredine nosioci naelektrisanja se kreću ubrzano => povećava se kinetička energija,
- zbog gustine sredine učestalost sudara je velika => putanja između dva sudara je kratka,
- prilikom sudara, naelektrisanja se zaustavljaju ili usporavaju; posledica je promena pravca kretanja i predaja kinetičke energije sredini (delimično ili u potpunosti) koja se transformiše u toplotu.

Srednja brzina $\vec{v}$ mnoštva naelektrisanja u jednom fizički beskonačno malom elementu zapremine ΔV naziva se srednja makroskopska brzina pokretljivih naelektrisanja.

Pokretljivost nosilaca naelektrisanja

Pravac struje elektrona je isti kao i pravac stranog električnog polja, samo je smer suprotan. Između dva sudara elektron se kreće ravnomerno ubrzano sa početnom brzinom $v_1 = v(t=0)$, da bi pri sledećem sudaru imao brzinu $v_2 = v(t=\tau)$ i neka je τ srednje vreme između dva sudara.

$\tau = \frac{s}{v_T}$, s - srednja vrednost pređenog puta, v_T - srednja brzina termičkog kretanja

Srednja brzina je $v = \frac{v_1 + v_2}{2}$.

Kako je $\vec{F} = m\vec{a}$ $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{e\vec{E}}{m}$

$$v_2 = \int_0^{\tau} a dt = a\tau = \frac{e\tau}{m} E \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{e\tau}{2m} \vec{E} = u \vec{E}$$

vidimo da je $v \sim E$ i ta konstantna srazmernosti je u , $u = \frac{e\tau}{2m}$.

Prateći efekti električne struje

❑ Toplotni efekat: poznat i kao Džulov efekat – zagrevanje provodnika kad kroz njega protiče struja. Pokretljiva naelektrisanja prilikom sudara sa atomima i molekulima sredine predaju svoju kinetičku energiju čiji se jedan deo transformiše u toplotu.

Prednost: elektrotermički uređaji, sijalice sa užarenim vlaknom, topljenje metala...

Mana: neželjeni efekti kod električnih mašina, transformatora, prenosnih vodova...

❑ Hemijski efekat: u elektrolitima (vodeni rastvori kiselina, baza i soli, kao i rastopine nekih metala). Struju obrazuju pozitivni i negativni joni, dolazi do transporta supstance i razgradnje elektrolita. Kada joni dođu do elektroda (pozitivni u smeru električnog polja, a negativni u suprotnom) vrši se njihova neutralizacija i izdvajanje supstance => elektroliza.

Prateći efekti električne struje

❑ Magnetni efekat: najznačajniji efekat. U okolini provodnika kroz koji protiče struja uočava se sledeće:

1. magnetna igla ima tendenciju da zauzme određeni položaj,
2. na stalne magnete i predmete od feromagnetnih materijala (gvožđe, nikl, kobalt, neke njihove legure i neke retke zemlje) deluje mehanička sila,
3. na naelektrisanu česticu koja se kreće u okolini provodnika kroz koji protiče električna struja deluje mehanička sila,
4. između dva provodnika kroz koje protiče električna struja javlja se mehanička takozvana elektromagnetna sila,
5. u provodniku koji se kreće u blizini drugih strujnih provodnika indukuje se elektromotorna sila, a ako on čini zatvorenu provodnu konturu u njoj se pojavljuje indukovana električna struja,
6. ako kroz provodnik protiče promenjiva električna struja u bliskoj zatvorenoj provodnoj konturi (pokretnoj ili nepokretnoj) indukuje se električna struja.

Jačina i smer električne struje

- Jačina struje je najvažnija kvantitativna karakteristika električne struje,
- Orjentisana skalarna veličina – određena svojom vrednošću i smerom,
- Vremenski promenjiva obeležava se sa i a vremenski nepromenjiva I (stacionarna, stalna jednosmerna struja),
- Definiše se kao količnik količine elektriciteta q koja protekne kroz poprečni presek provodnika za vreme t i tog vremena:

$$I = \frac{q}{t} \quad \text{ili} \quad i(t) = \frac{dq}{dt}$$

Fizički smer je suprotan kretanju elektrona provodnosti – odgovara smeru kretanja pozitivnih naelektrisanja.

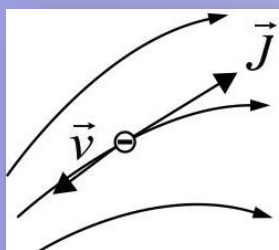
Jedinica za jačina struje je A (amper) - osnovna jedinica u SI sistemu.

$$I_u = \frac{q_u}{t_u} = \frac{C}{s} = A$$

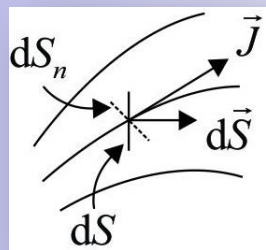
Amper je jačina stalne el. struje koja pri proticanju kroz dva neograničeno duga paralelna provodnika kružnog poprečnog preseka zanemarljive debljine, koji se nalaze u vakumu na međusobnom rastojanju od 1m izaziva silu po jedinici dužine provodnika od $2 \cdot 10^{-7}$ N.

Vektor gustine struje

- Za precizno opisivanje strujnog polja uvodi se *vektor gustine struje* $\vec{J}$.
- Pravac vektora gustine struje u svakoj tački strujnog polja određen je pravcem kretanja elektrona provodnosti, dok mu je smer suprotan smeru njihovog kretanja.
- Linije strujnog polja se mogu definisati i kao linije koje u svakoj tački za tangentu imaju vektor gustine struje i orijentisane su u njegovom smeru, suprotno makroskopskom smeru kretanja elektrona provodnosti.
- Skup linija polja naziva se spektar polja.

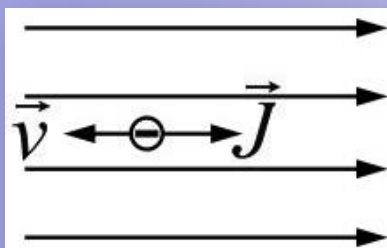


$$J = \frac{dI}{dS_n}$$



$$dI = J \cdot dS_n = J \cdot dS \cdot \cos(\vec{J}, d\vec{S}) = \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

nehomogeno strujno polje



$$J = \frac{I}{S}$$

homogeno strujno polje

Jedinica za vektor gustine struje je

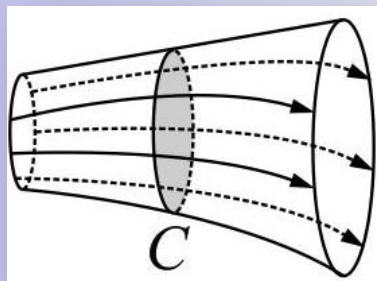
$$J_u = I_u / S_u = \text{A/m}^2$$

Vektor gustine struje

- Jačina električne struje kroz proizvoljnu površinu S , jednaka je fluksu vektora gustine struje kroz tu površinu:

$$I = \int_S dI = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

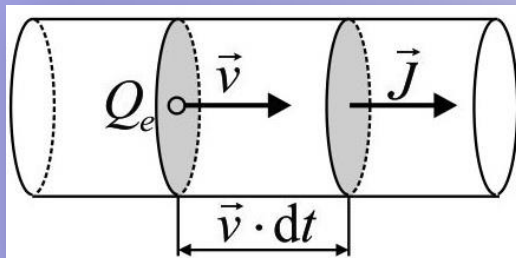
- Površina po kojoj se vrši integracija može biti površina poprečnog preseka nekog provodnika ili neke strujne tube (deo prostora u strujnom polju omeđen linijama polja vektora gustine struje).



- Algebarski znak fluksa vektora gustine struje kroz neku površinu (a samim tim i jačina električne struje) može biti pozitivan ili negativan, što zavisi od izbora jediničnog vektora normale na tu površinu.

Vektor gustine struje $\Leftrightarrow$ srednja brzina nosilaca

- Između vektora gustine struje i srednje brzina slobodnih nosilaca elektriciteta koji opisuju strujno polje postoji određena zavisnost.
- Jačina struje je direktno srazmerna broju nosilaca naelektrisanja.



U vremenskom intervalu dt svako elementarno naelektrisanje Q_e pređe put $s = v \cdot dt$. Broj slobodnih opterećenja koja u ovom vremenskom intervalu prođe kroz površinu S jednak je ukupnom broju slobodnih opterećenja u zapremini $N = N'V = N'Svdt$.

Protekla količina elektriciteta kroz površinu S je:

$$dq = N Q_e = N' Q_e S v dt$$

Kako je $i = \frac{dq}{dt} = N' Q_e S v$, za gustinu struje se dobija $J = N' Q_e v$, odnosno

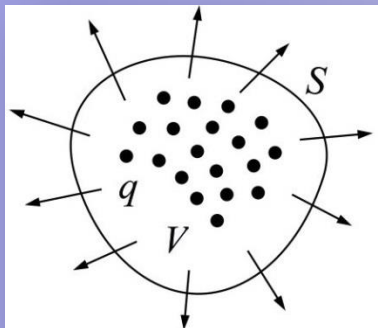
$$\vec{J} = N' Q_e \vec{v} = \rho \vec{v}.$$

U slučaju kondukcijske struje (usmereno kretanje elektrona provodnosti) vektor gustine struje i vektor brzine slobodnih nosioca elektriciteta imaju suprotne smerove

$$\vec{J} = -N' Q_e \vec{v} = -\rho \vec{v}.$$

Jednačina kontinuiteta

Neka se u nekom domenu zapremine V , ograničenom zatvorenom površinom S , nalazi količina slobodnih nosilaca elektriciteta q



- Ova količina elektriciteta može se izmeniti samo ukoliko opterećenja napuštaju domen ili u njega ulaze kroz graničnu površinu S , obrazujući pri tome električnu struju.
- Izlazni fluks vektora gustine struje kroz zatvorenu površinu S predstavlja ukupnu struju kroz ovu površinu

Protekla količina elektriciteta kroz površinu S je:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = i = -\frac{dq}{dt}$$

Ovaj izraz predstavlja *jednačinu kontinuiteta* u integralnom obliku i predstavlja matematički iskaz zakona o očuvanju (konzervaciji) količine elektriciteta.

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{J} dV = -\int_V \frac{d\rho}{dt} dV \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{d\rho}{dt}} \quad \begin{array}{l} \text{diferencijalni (lokalni) oblik} \\ \text{jednačine kontinuiteta} \end{array}$$

Znak „-“ je posledica činjenice da pozitivnom izlaznom fluksu vektora gustine struje kroz površinu S odgovara smanjenje (negativni priraštaj) količine elektriciteta u domenu ograničenom tom površinom.

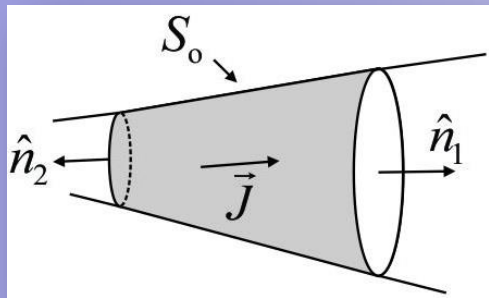
Jednačina kontinuiteta i I Kirhofov zakon

U slučaju stacionarnog strujnog polja raspored naelektrisanja je stacionaran. Umesto naelektrisanja koja napuste zapreminu V dolaze nova, pa količina naelektrisanja q ostaje nepromenjiva unutar zapremine V ($dq / dt = 0$), pa je

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Ovo je specijalni slučaj jednačine kontinuiteta za stacionarno strujno polje i naziva se *I Kirhofov zakon*.

Posledica – jačina struje u bilo kom poprečnom preseku jedne strujne tube je ista.



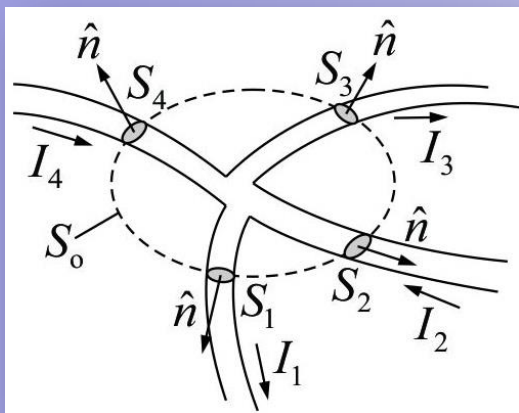
$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{B1}} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{B2}} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S_0} \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\int_{S_{B1}} \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \int_{S_{B2}} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{odnosno} \quad I_1 = -I_2 \quad \text{ili} \quad I_1 + I_2 = 0.$$

Jednačina kontinuiteta i I Kirhofov zakon

Neka je dat veći broj provodnika koji se spaja u jednom mestu (čvor) i površina S kojom je obuhvaćeno mesto spoja $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_0$



Jednačini kontinuiteta za stacionarno strujno polje će biti

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S_4} \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0$$

Za čvor: algebarski zbir struja koje se sustiču u jednom čvoru jednak je nuli,

$$\sum_{n=1}^N I_n = 0$$

Struje koje ističu iz čvora uzimaju se sa znakom plus, a koje utiču sa znakom minus.

Još jedna formulacija: zbir struja koje ističu iz čvora jednak je zbiru struja koje utiču u čvor

$$\sum I_{\text{ist.}} = \sum I_{\text{ut.}}$$

Za prethodni primer: $I_1 + I_3 = I_2 + I_4$

Omov zakon

- Jačina struje u provodniku proporcionalna je gustini struje, odnosno srednjoj makroskopskoj brzini kretanja elektrona provodnosti,
- Srednja makroskopska brzina slobodnih elektrona zavisi od jačine stacionarnog el. polja u provodniku, a samim tim od potencijalne razlike između krajeva provodnika,
- Sledi da je jačina struje I u provodniku proporcionalna naponu U na njegovim krajevima $I = f(U)$. Ovo je takozvana volt – amperska karakteristika.

Omov zakon:

Jačina električne struje kroz provodnik direktno je proporcionalna naponu između njegovih krajeva

$$I = G \cdot U$$

Konstanta proporcionalnosti G naziva se *električna provodnost* provodnika. Recipročna vrednost električne provodnosti je *električna otpornost*

$$R = 1 / G.$$

Omov zakon u integralnom obliku:

$$I = G \cdot U \quad G = I / U$$

$$U = R \cdot I \quad R = U / I \quad I = U / R$$

Jedinice: $R_u = U_u / I_u = V / A = \Omega$ (om) $G_u = I_u / U_u = A / V = S$ (simens)

Otpornost i provodnost

Otpornost nekog provodnika pri stalnoj temperaturi je $R = U / I$.

- Jačina struje je direktno srazmerna površini poprečnog preseka S – otpornost je obrnuto proporcionalna toj površini,
- Gustina struje je proporcionalna brzini elektrona provodnosti, a brzina je proporcionalna jačini stacionarnog električnog polja.
- Ukoliko je provodnik duži, jačina stacionarnog polja, pri istom naponu biće manja. Samim tim biće manja brzina elektrona, gustina i jačina struje, što znači da će otpornost biti veća, odnosno direktno je proporcionalna dužini provodnika.
- Gustina struje pri istom polju zavisice od zapreminske gustine slobodnih nosilaca naelektrisanja, odnosno od vrste materijala od koga je provodnik načinjen.

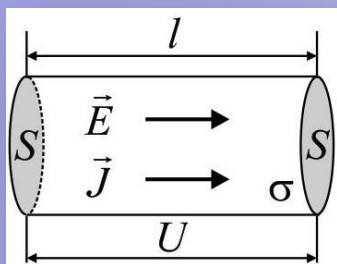
Otpornost provodnika dužine l , stalne površine poprečnog preseka S , načinjenog od homogenog materijala izračunava se kao

$$R = \rho \frac{l}{S}.$$

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{\rho} \frac{S}{l} \quad \rightarrow \quad G = \sigma \frac{S}{l}$$

Omov zakon u lokalnom obliku

- Omov zakon u lokalnom obliku daje vezu između vektora gustine struje, vektora jačine stacionarnog električnog polja i karakteristike sredine u svakoj tački polja.
- Važi i u slučaju homogenog i nehomogenog strujnog polja.



Dat je deo tankog provodnika dužine l stalnog poprečnog preseka S , načinjen od homogenog materijala čija je specifična provodnost σ kroz koji protiče struja I .

$$I = J \cdot S \quad U = E \cdot l$$

$$I = G \cdot U$$

$$J S = \sigma \frac{S}{l} E l = \sigma S E$$

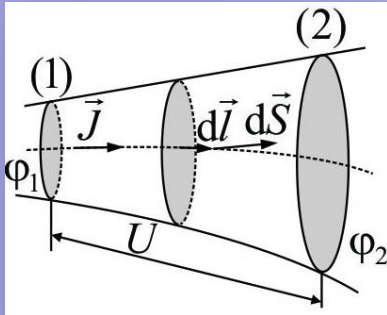
$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \rho \vec{v} & \vec{v} &= \frac{e\tau}{2m} \vec{E} = u \vec{E} \\ \vec{J} &= \rho u \vec{E} & \rho &= N' e \\ \sigma &= \frac{\vec{J}}{\vec{E}} = \rho u = \frac{N' e^2 \tau}{2m} = \frac{N' e^2 s}{2m v_T} = \sigma \end{aligned}$$

poslednji izraz predstavlja *Omov zakon u lokalnom (diferencijalnom) obliku* i predstavlja vezu između vektora gustine struje i vektora jačine stacionarnog električnog polja u svakoj tački strujnog polja.

Izračunavanje otpornosti

Jedini uslov je da je strujno polje u jednom poprečnom preseku homogeno.



$$\vec{E} = \rho \vec{J} \quad \leftarrow \text{ / obe strane } \cdot d\vec{l}, \text{ i samo desnu } \cdot \frac{d\vec{S}}{dS} \text{ /}$$

$$\vec{E} d\vec{l} = \rho \frac{\vec{J} d\vec{S}}{dS} d\vec{l} \quad \leftarrow \text{ / zbog kolinearnosti } d\vec{S} d\vec{l} = dS dl \text{ /}$$

$$\vec{E} d\vec{l} = \rho \frac{\vec{J} d\vec{S}}{dS} dl = \rho \frac{dl}{dS} dI \quad \leftarrow \text{ / } dI = \vec{J} d\vec{S} \text{ / } \rightarrow \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 \rho \frac{dl}{dS} dI = dI \int_1^2 \rho \frac{dl}{dS}$$

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = dI \int_1^2 \rho \frac{dl}{dS} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow R = \frac{U}{dI} = \int_1^2 \rho \frac{dl}{dS} \quad \rightarrow R = \int_1^2 \rho \frac{dl}{S}$$

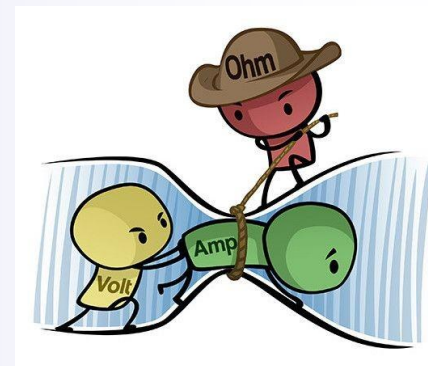
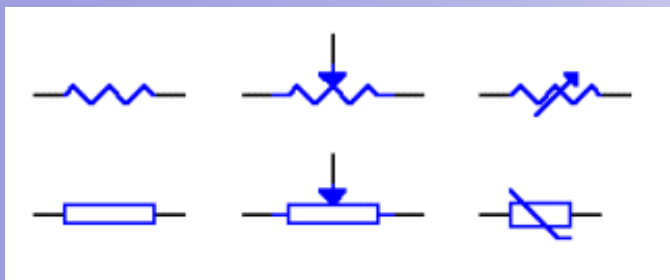
Za slučaj provodnika od homogenog materijala i konstantnog poprečnog preseka

$$R = \int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = \frac{\rho}{S} \int_1^2 dl = \rho \frac{l}{S}.$$

Otpornici

- Svi elementi od kojih se sastoji neko električno kolo imaju veću ili manju otpornost, odnosno provodnost.
- Otpornici su elementi pomoću kojih namerno unosimo el. otpor u strujno kolo.
- Koriste se za ograničenje struje u kolu i za dobijanje željenog napona na krajevima otpornika.

Simboli za označavanje otpornika

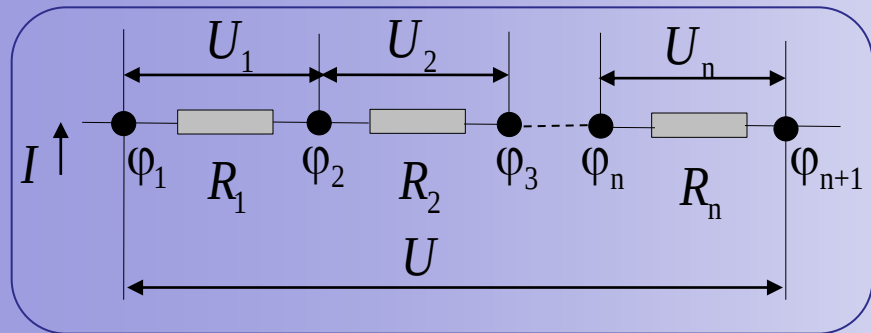


Sprezanje otpornika može biti:

- redno,
- paralelno,
- mešovito.

Otpornici – redna veza

- Kroz sve otpornike protiče ista struja.



$$U_i = \varphi_i - \varphi_{i+1} \rightarrow$$

$$U_1 = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$U_2 = \varphi_2 - \varphi_3$$

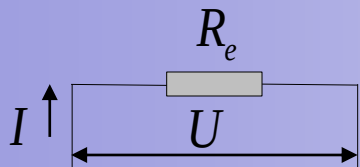
$$U_3 = \varphi_3 - \varphi_4$$

$$\vdots$$

$$U_n = \varphi_n - \varphi_{n+1}$$

$$\sum_{i=1}^n U_i = \varphi_1 - \varphi_{n+1} = U$$

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n R_i I = I \sum_{i=1}^n R_i = I R_e$$



$$R_e = \sum_{i=1}^n R_i$$

$$R_i = \frac{1}{G_i} \rightarrow$$



$$\frac{1}{G_e} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{G_i}$$

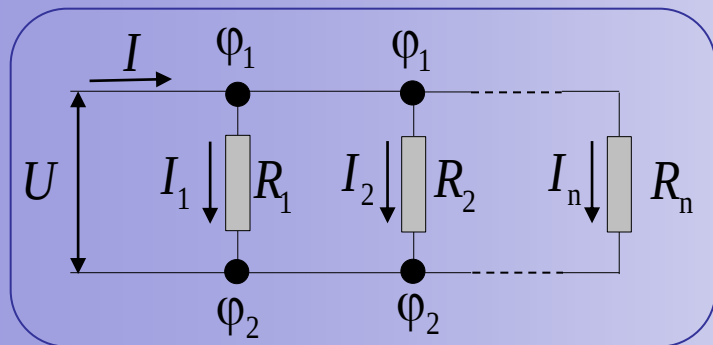
Za dva otpornika

$$R_e = R_1 + R_2$$

$$G_e = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$$

Otpornici – paralelna veza

- Svi otpornici su na istom naponu.



$$I_i = \frac{U}{R_i}$$



$$I_1 = \frac{U}{R_1}$$

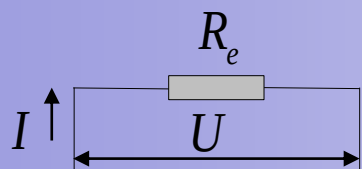
$$I_2 = \frac{U}{R_2}$$

$\vdots$

$$I_n = \frac{U}{R_n}$$

$$\sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n \frac{U}{R_i}$$

$$I = \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n \frac{U}{R_i} = U \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} = \frac{U}{R_e}$$



$$\frac{1}{R_e} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

$$G_i = \frac{1}{R_i}$$



$$G_e = \sum_{i=1}^n G_i$$

Za dva otpornika

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$G_e = G_1 + G_2$$

Džulov zakon

- Sile električnog polja pomerajući naelektrisanja vrše rad.
- U provodnicima zbog stalnih sudara elektrona sa jonima kristalne rešetke, celokupan rad se pretvara u toplotu.

$$dA = \vec{F} d\vec{l} = q \vec{E} \vec{v} dt \quad q = N'e dV$$

Zagrevanje provodnika usled proticanja električne struje je tzv. Džulov gubitak ili Džulov efekat. Snaga Džulovih gubitaka po elementu zapremine je

$$dP = \frac{dA}{dt} = N'e \vec{v} \vec{E} dV = \vec{J} \vec{E} dV$$

U homogenom provodniku konačnih dimenzija snaga Džulovih gubitaka je

$$P = \int_V \vec{J} \vec{E} dV = \int_S \vec{J} d\vec{S} \int_l \vec{E} d\vec{l} = IU$$

Džulov zakon u lokalnom (diferencijalnom) obliku

$$\frac{dP}{dV} = \vec{J} \vec{E}$$

Džulov zakon u integralnom obliku

$$P = IU$$

U slučaju stacionarnih struja

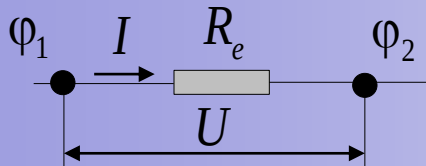
$$\frac{dP}{dV} = \rho J^2 = \sigma E^2$$

$$\begin{aligned} P_u &= W = J / s \\ J &= Ws \\ W &= VA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_u &= kWh \\ 1kWh &= 3.6MJ \end{aligned}$$

Snaga na potrošaču

- Snaga na potrošaču određena je njegovom otpornošću i jačinom struje kroz njega.



Protekla količina naelektrisanja kroz otpornik za vremenski interval Δt je:

$$\Delta q = I \Delta t$$

Utrošen rad za prebacivanje naelektrisanja je: $\Delta A = \Delta q(\varphi_1 - \varphi_2) = U I \Delta t$

Ovaj rad se u potrošaču transformiše u druge vidove rada i energije sa snagom:

$$P = \frac{\Delta A}{\Delta t} = U I$$

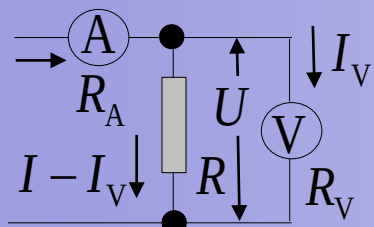
Ukoliko je jačina el. struje konstantna, rad se izračunava kao $A = P t = U I t$

Dakle, vidimo da potrošač proizvoljnog tipa možemo zameniti jednim ekvivalentnim otpornikom otpornosti R_e . Uslov je da snaga na otporniku pri istoj struji I bude jednaka snazi potrošača P , odakle sledi:

$$P = U I = R_e I^2$$

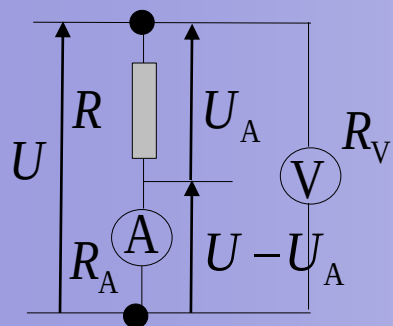
Merenje otpornosti

- Otpornost se meri posredno, merenjem napona na krajevima otpornika i struje koja protiče kroz njega.



$$R_M = \frac{U}{I} = \frac{R_V R}{R_V + R} \quad \rightarrow \quad R_M = \frac{R}{1 + R / R_V}$$

Da bi tačnost merenja bila što veća potrebno je da $R_V \rightarrow \infty$.



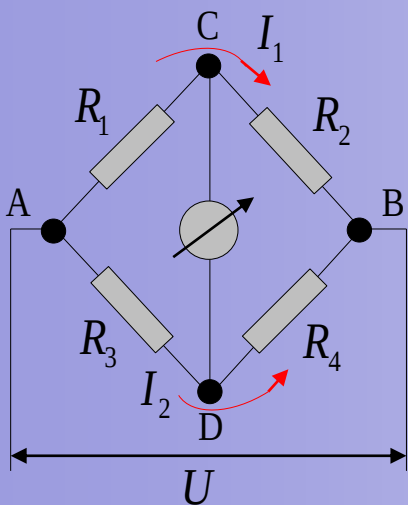
$$R_M = \frac{U}{I} = R + R_A$$

Da bi tačnost merenja bila što veća potrebno je da $R_A \rightarrow 0$.

- Merenje otpornosti ampermetrom i voltmetrom je neminovno praćeno greškom.
- Ova greška je posledica konačne otpornost instrumenata i same merne metode i naziva se *sistemska* greška.
- Pored sistemske javljaju se i *objektivna* (greška instrumenta) i *subjektivna* (greška pri očitavanju vrednosti).

Merenje otpornosti

- Jedno od najtačnijih merenja otpornosti je merenje pomoću mosta.



Merenje se vrši tako što se most dovede u ravnotežu – struja u grani između tačaka C i D je jednaka nuli, odnosno $U_{CD} = 0$.

$$I_1 = \frac{U}{R_1 + R_2} \quad I_2 = \frac{U}{R_3 + R_4}$$

$$U_{CD} = 0 \quad \Rightarrow \quad U_{AC} = R_1 I_1 = R_3 I_2 = U_{AD}$$

$$R_1 \frac{U}{R_1 + R_2} = R_3 \frac{U}{R_3 + R_4}$$



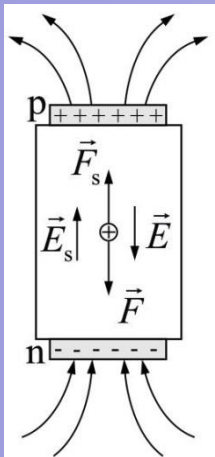
Uslov ravnoteže mosta

$$R_1 R_4 = R_2 R_3$$

Most je u ravnoteži kada je proizvod otpornosti otpornika u naspramnim granama mosta međusobno jednak.

Strana sila i strano polje

- Generator je sredina kroz koju se vrši transport slobodnih nosioca naelektrisanja pod dejstvom nekulonskih sila nasuprot silama stacionarnog električnog polja.
- Ove sile se nazivaju stranim silama i mogu biti različite prirode (elektrohemijske, elektromagnetske,...).



$\vec{F}_s$ je strana sila koja deluje na opterećenje (pr. pozitivno opterećenje).

Sila od stacionarnog polja je $\vec{F} = Q_e \vec{E}$.

Strano polje se definiše kao el. polje koje bi na slobodne nosioce naelektrisanja delovalo silom koja je jednaka stranoj sili $\vec{E}_s = \frac{\vec{F}_s}{Q_e}$.

Kretanje naelektrisanja kroz generator je dok se ove sile ne izjednače

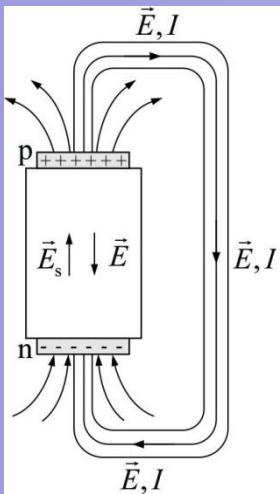
$$\vec{F} + \vec{F}_s = 0 \quad \text{odnosno} \quad \vec{E} + \vec{E}_s = 0.$$

Kada se generator uključi u strujno kolo zatvara se provodni put između njegovih polova (priključaka).

Stacionarno el. polje u provodniku deluje na naelektrisanja i ona se kreću od pozitivnog ka negativnom polu.

Strano polje u opterećenom generatoru postaje po intenzitetu veće od stacionarnog električnog polja $|\vec{E}_s| > |\vec{E}|$.

Kroz generator protiče el. struja u smeru od tačke nižeg ka tački višeg potencijala.



Elektromotorna sila

- Rad koji vrše strane sile pri pomeranju naelektrisanja kroz generator transformiše se u energiju stacionarnog električnog polja.

Elektromotorna sila je jednaka količniku rada koji izvrše strane sile prilikom prebacivanja količine naelektrisanja ΔQ kroz generator od negativnog do pozitivnog priključka i same te količine naelektrisanja

$$E = \frac{A}{\Delta Q}$$

Rad je po definiciji: $A = \int_n^p \vec{F}_s d\vec{l} = \int_n^p \Delta Q \vec{E}_s d\vec{l} = \Delta Q \int_n^p \vec{E}_s d\vec{l} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{A}{\Delta Q} = \int_n^p \vec{E}_s d\vec{l}$

Elektromotorna sila je linijski integral vektora stranog polja kroz generator od negativnog do pozitivnog priključka.

Kako je za neopterećeni generator $\vec{E} + \vec{E}_s = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\vec{E}_s$

$$\Rightarrow E = \int_n^p \vec{E}_s d\vec{l} = - \int_n^p \vec{E} d\vec{l} = \int_p^n \vec{E} d\vec{l}$$

$$E = \int_p^n \vec{E} d\vec{l}$$

Elektromotorna sila jednaka je linijskom integralu vektora jačine stacionarnog el. polja od pozitivnog do negativnog priključka generatora u praznom hodu.

Elektromotorna sila

- Elektromotorna sila je orjentisana skalarna veličina usmerena od negativnog ka pozitivnom priključku generatora.
- Brojno je jednaka potencijalnoj razlici između priključenih krajeva generatora u praznom hodu, odnosno naponu praznog hoda generatora.

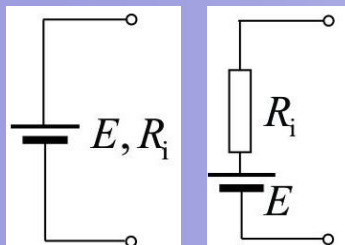
$$E = \int_p^n \vec{E} d\vec{l} = \varphi_p - \varphi_n = (U_{pn})_0$$

- Iako je brojno jednaka naponu i ima istu jedinicu kao napon ($E_u = V$), ona po prirodi nije napon.
- To je veličina koja na prikladan način reprezentuje strane sile u generatoru!
- Generator je provodna sredina kroz koju se kreću naelektrisanja.
- Ovo kretanje je praćeno toplotnim gubicima – Džulovi gubici.

Reprezent Džulovih gubitaka u generatoru je unutrašnja otpornost generatora

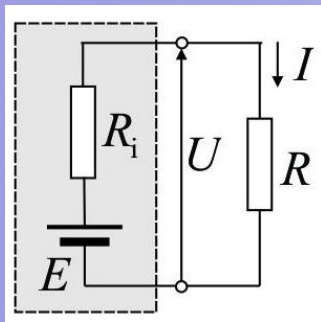
$$R_i = P_j / I^2 \quad P_j \text{ - snaga Džulovih gubitaka u generatoru}$$

I - struja kroz generator



Elektromotorna sila i unutrašnja otpornost generatora se ne mogu razdvojiti.

Snaga, stepen korisnog dejstva i prilagođenje



Ukupna snaga P koju daje izvor napajanja određuje se iz Džulovog zakona

$$I = \frac{E}{R + R_i} \quad \rightarrow \quad P = \frac{E^2}{R + R_i} \quad P_R = RI^2 = R \frac{E^2}{(R + R_i)^2}$$

Odnos korisne snage (koja se razvija na potrošaču) i ukupne snage definiše stepen korisnog dejstva η

$$\eta = \frac{P_R}{P} = \frac{R}{R + R_i} = \frac{1}{1 + R_i / R}$$

Stepen korisnog dejstva se kreće u granicama između 0 i 1. Ovo je vrlo bitna veličina u elektroenergetici i potrebno je da bude sto veća.

U elektronici gde se radi sa malim snagama, potrebno je da se što veća snaga preda potrošaču. Snaga na potrošaču će biti jednaka nuli za $R = 0$ i $R \rightarrow \infty$.

Uslov prilagođenja prijemnika po snazi se dobija kada je prvi izvod snage po promenljivoj otpornosti R jednak 0 $\frac{dP(R)}{dR} = 0 \rightarrow R = R_i$

Uslov prilagođenja
potrošača na generator

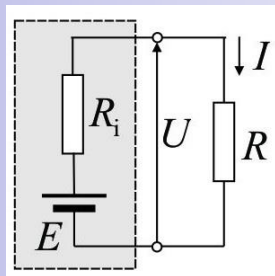
Na potrošaču će se razvijati maksimalna snaga kada je njegova otpornost jednaka unutrašnjoj otpornosti generatora $R = R_i$.

Naponski i strujni generator

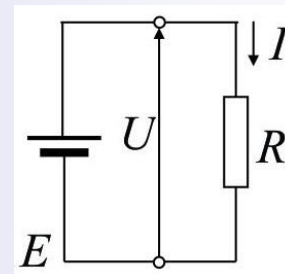
- Neka je priključen potrošač na generator sa unutrašnjom otpornošću

$$I = \frac{E}{R + R_i}$$

$$U = RI = R \frac{E}{R + R_i} = \frac{E}{1 + R_i / R}$$

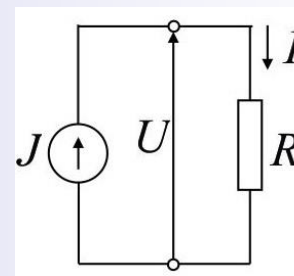


$$R_i = 0$$



$$U = E$$

$$R_i \rightarrow \infty$$



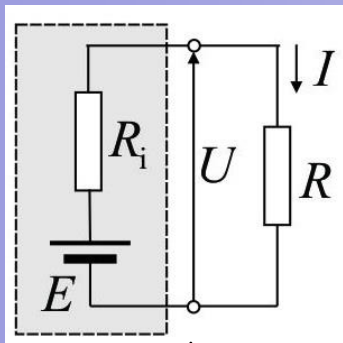
$$I = J$$

U slučaju kada je $R_i \ll R$ generator se može smatrati idealnim naponskim generatorom na čijim krajevima je napon u funkciji opterećenja R približno konstantan, $U \approx E$.

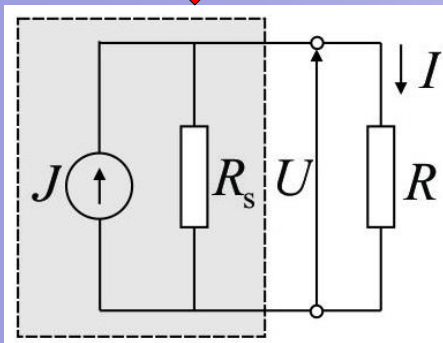
U slučaju kada je $R_i \gg R$ generator se može smatrati idealnim strujnim generatorom koji daje približno stalnu struju bez obzira na opterećenje, $I \approx J$.

Naponski i strujni generator - transfiguracija

- U realnim uslovima, svaki generator se može predstaviti i kao naponski i kao strujni.
- Realni naponski generator predstavlja rednu vezu idealnog naponskog generatora i unutrašnje otpornosti.
- Realni strujni generator predstavlja paralelnu vezu idealnog strujnog generatora i unutrašnje otpornosti.



Realni naponski generator elektromotorne sile E i unutrašnje otpornosti R_i može se transfigurisati u realni strujni generator čiji su elementi $J = E / R_i$ i $R_s = R_i$.



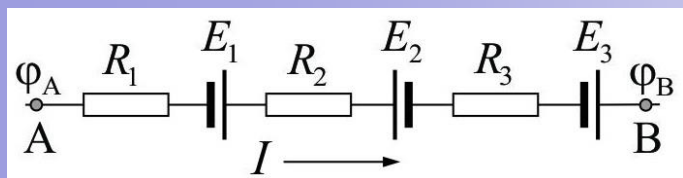
Realni strujni generator struje kratkog spoja J i unutrašnje otpornosti R_s može se transfigurisati u realni naponski generator čiji su elementi $E = J R_s$ i $R_i = R_s$.

Transfiguracija idealnih generatora nije moguća!

II Kirhofov zakon

Elementi složenog električnog kola su:

- Grana – redna veza proizvoljnog broja elemenata kola,
- Čvor – mesto u kome se spajaju tri ili više grana,
- Kontura – proizvoljan zatvoren put sastavljen od grana kola,
- Nezavisna kontura – kontura koja sadrži bar jednu granu koja pripada samo njoj i nijednoj drugoj konturi,
- Nezavisna grana – grana koja pripada samo jednoj konturi i nijednoj više.



Neka je zadata grana složenog kola.

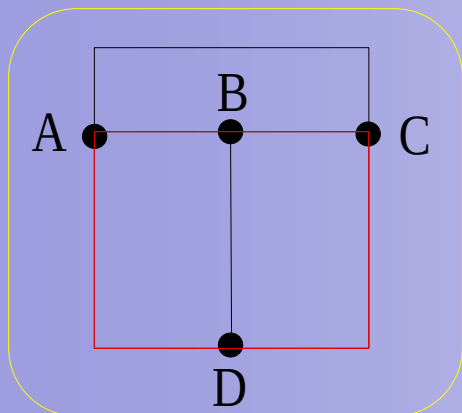
$$U_{AB} = \phi_A - \phi_B = U_{R_1} - E_1 + U_{R_2} + E_2 + U_{R_3} - E_3$$

$$U_{AB} = R_1 I - E_1 + R_2 I + E_2 + R_3 I - E_3 = (R_1 + R_2 + R_3)I - (E_1 - E_2 + E_3)$$

$$U_{AB} = \sum R I - \sum E$$

$$I = \frac{U_{AB} + \sum E}{\sum R}$$

II Kirhofov zakon



Uočimo u jednom kolu proizvoljnu zatvorenu konturu, recimo konturu ABCDA.

Zbir napona između krajeva pojedinih grana biće

$$\begin{aligned} U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DA} &= \\ &= (\varphi_A - \varphi_B) + (\varphi_B - \varphi_C) + (\varphi_C - \varphi_D) + (\varphi_D - \varphi_A) = 0 \end{aligned}$$

Kada se u ovu jednačinu unesu poznati izrazi za napon na krajevima grane složenog kola $U = \sum RI - \sum E$ dobija se

$$\sum_{AB} RI - \sum_{AB} E + \sum_{BC} RI - \sum_{BC} E + \sum_{CD} RI - \sum_{CD} E + \sum_{DA} RI - \sum_{DA} E = 0$$

II Kirhofov zakon

$$\sum_{ABCD} RI - \sum_{ABCD} E = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \sum_{ABCD} RI = \sum_{ABCD} E$$

$$\sum_{i=1}^n U_i = 0$$

Algebarski zbir napona na svim otpornicima u jednoj zatvorenoj konturi jednak je algebarskom zbiru svih elektromotornih sila u toj konturi.

Ukoliko je smer obilaska po konturi saglasan sa smerom struje, napon na otporniku se uzima sa pozitivnim znakom (isto važi i za elektromotorne sile).